Исследование устойчивости кооперативных взаимодействий методами агентного моделирования и эволюционных игр

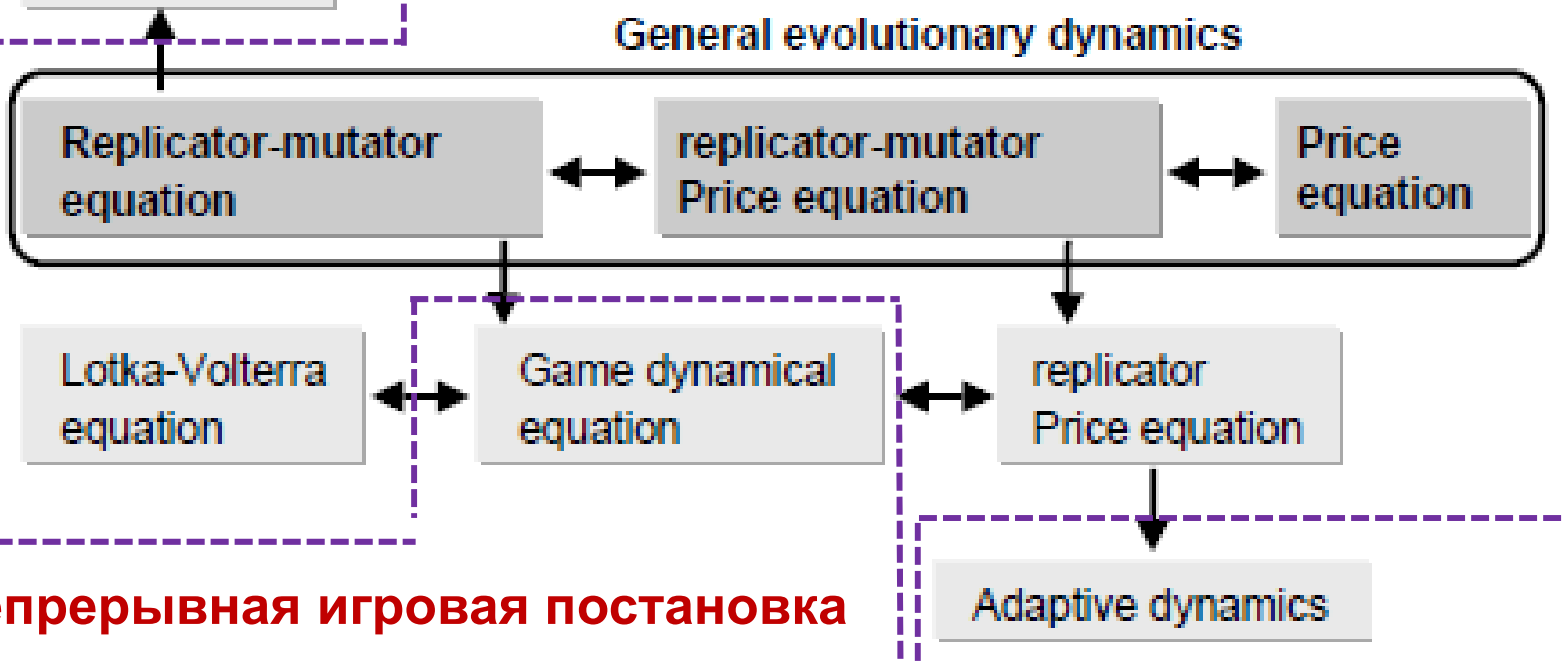
Топаж А.Г., Абрамова А.В

Шестая Национальная научная конференция с международным участием «Математическое моделирование в экологии» ЭкоМатМод-2019, Пущино, 26-20 сентября 2019 г.

Динамика самовоспроизводящихся систем. Основные виды эволюционных уравнений

Мутации
(Eigen et al., 1989)

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j q_{ji} - x_i \bar{f}.$$



Непрерывная игровая постановка

$$\frac{\partial \mu(x,t)}{\partial t} = \mu(x,t)\cdot\left(f(x) - \bar{f}\right); \quad \bar{f} = \int_X f(x)\cdot\mu(x,t)\cdot dt$$

$$f(x) = f\left(x, \mu(s,t)\right), \; s \in X$$

Частотно-зависимый отбор
(Hofbauer & Sigmund, 1998)

$$\dot{x}_i = x_i[f_i(\mathbf{x}) - \bar{f}].$$

Математические модели социобиологии. Эволюционные игры.

Джон Мейнард Смит

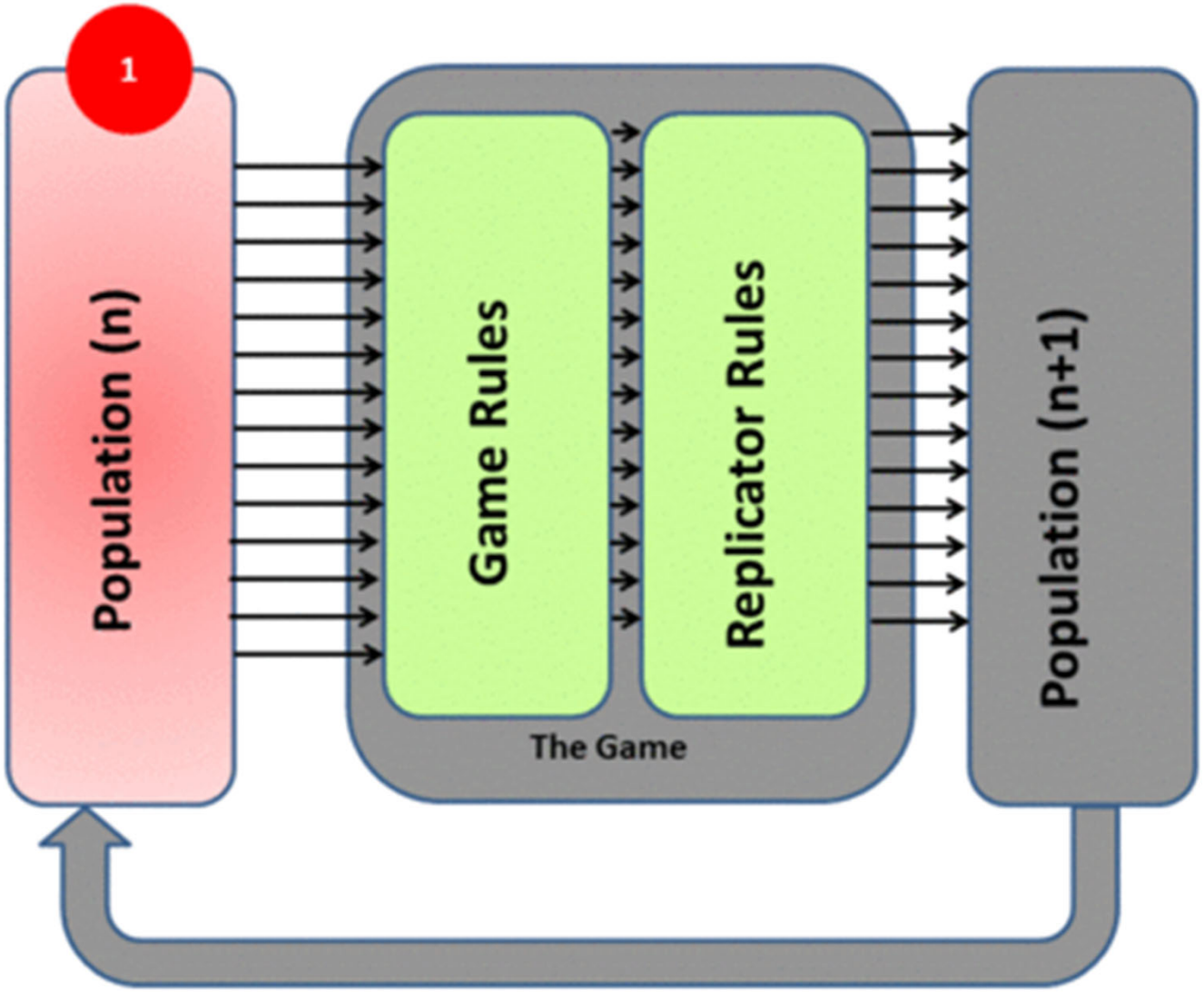
Вопросы:

- “Джентельменское поведение” vs. индивидуализм
- Парадокс биоразнообразия vs. принцип генетического исключения

Источники и составные части:

- Теория естественного отбора
- Генетические (эволюционные алгоритмы)
- Теория игр

Эволюционная игра



Эволюционно-стабильные стратегии

ЭСС - такая стратегия, которая будучи принята большинством членов данной популяции, не может быть превзойдена никакой ***альтернативной*** стратегией.

ЭСС должна быть эффективна против любой другой стратегии, в том числе и против копий самой себя

(*Р. Докинз*)

Игра «Ястребы - голуби»

C >> V	…встречает ястреба	…встречает голубя
Если ястреб…	*Они дерутся.* *Оба травмируются .* *Один побеждает.* **V/2 – C**	*Он забирает все* **V**
Если голубь…	*Он удирает* **0**	*Они разбираются без драки* **V/2**

> **(V > V/2)**

> **(0 > V/2-C)**

Игра «Ястребы - голуби»

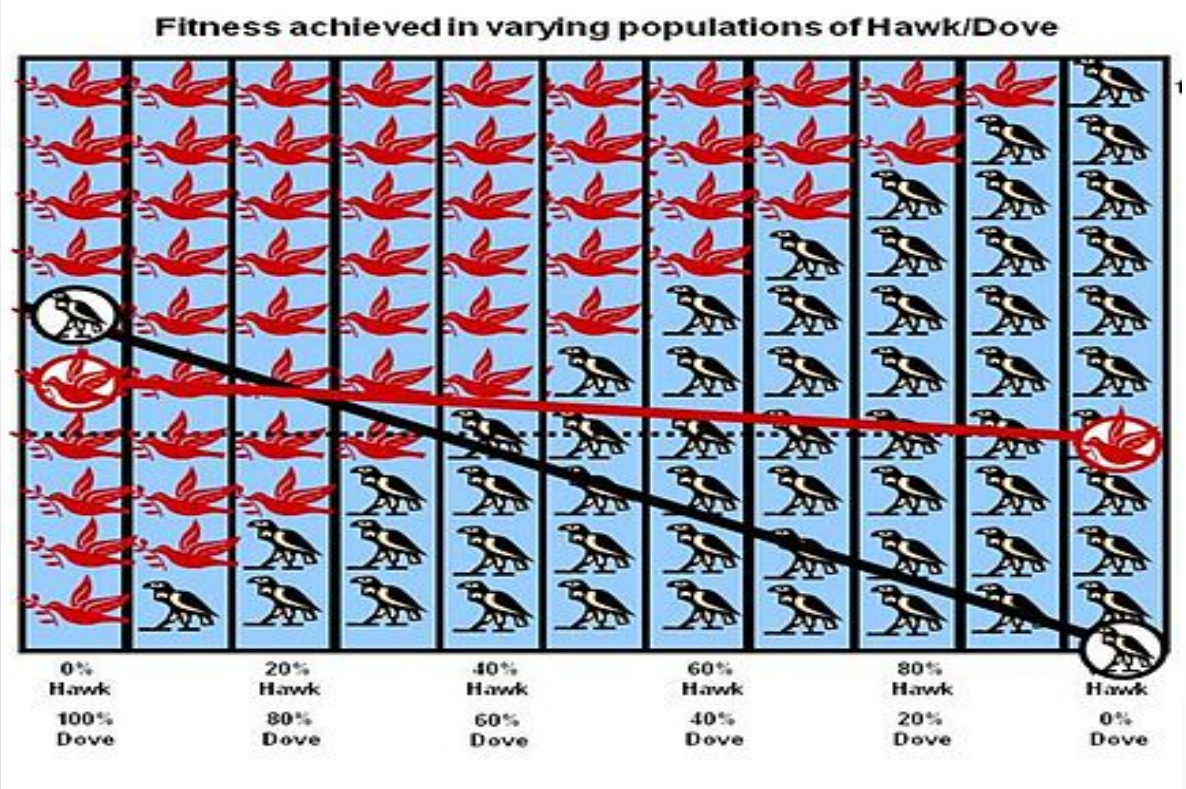
Пусть α – доля голубей в популяции

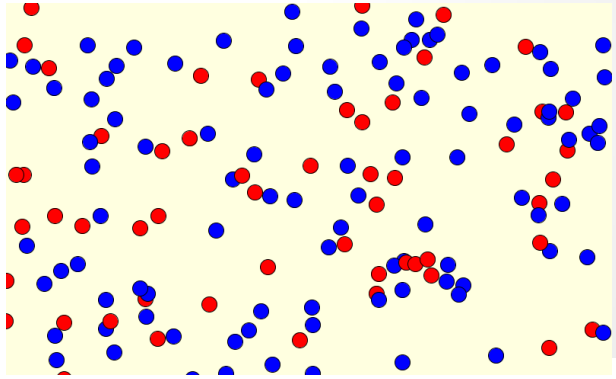
Средняя приспособленность ястреба: $\alpha \cdot v + (1-\alpha)\cdot(v/2-c)$

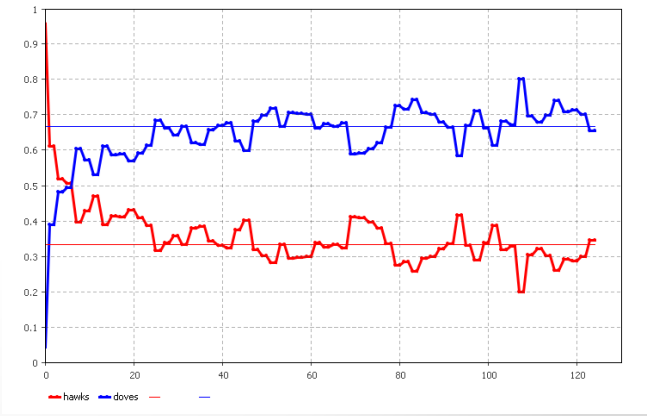
Средняя приспособленность голубя: $\alpha \cdot v/2 + (1-\alpha)\cdot 0$

«Равновесная» приспособленность: $\alpha^e = 1 - v/(2\cdot c)$

«Максимальная» приспособленность: $\alpha^* \neq \alpha^e$







«Социальная экология». Игра в «общественное благо»

N индивидуумов выбирают, какую долю собственного богатства вложить в общий банк. Средства, вложенные в общий банк, умножаются на коэффициент дохода k (1<k<N) и полученная прибыль ПОРОВНУ разделяется между участниками. Каждый игрок также сохраняет невложенные деньги. Какова оптимальная стратегия каждого участника?

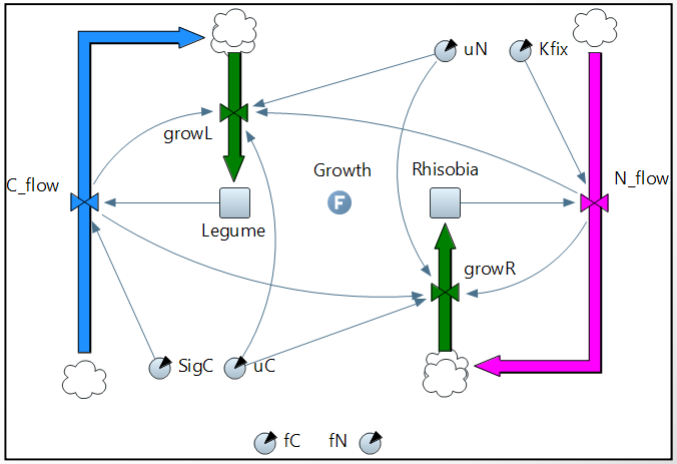
Общая доход коллектива максимизируется, когда каждый вносит все свои средства в общий пул. Однако равновесие по Нэшу в этой игре - нулевой вклад каждого; для любого рационального агента лучше всего ничего не вносить, независимо от того, сколько вносят его партнеры .

Выгода сотрудничества. Эффект группового отбора

№	Вид игры	Порядок выигрышей	ЭСС		
1	Дилемма заключенного	ПХ>ХХ>**ПП**>ХП	П		
2	«Общественное благо»	ПХ>ХХ>**ПП**>ХП	П		
3	«Ястребы-голуби»	ПХ>ХХ>ХП>ПП	смешанная стратегия		
4	Симбиотическая азотфиксация	**ХХ**>ПХ=**ПП**>ХП	Х		
5	«Реновация общего ресурса» (дискретная постановка)	**ХХ**>ПХ=**ПП**>ХП	П		Х
6	«Реновация общего ресурса» (непрерывная постановка)	**ХХ**>ПХ=**ПП**>ХП	П	Х	набор смешанных стратегий
7	«Социальные амебы»	**ХХ**>ПХ>**ПП**>ХП			

Выгода сотрудничества. Симбиотическая азотфиксация.

$$N_2 + 8H^+ + 8e^- \longrightarrow 2NH_3 + H_2$$



Симбиотическая азотфиксация. Модель в виде дифференциальной игры

Ассимиляция:

$$\dot{C} = \sigma_0 X_0, \quad \dot{N} = \sigma_1 X_1$$

Рост:

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = f_0\left(\left(1-u_0\right)\dot{C},\, u_1\dot{N}\right) \\ \dot{X}_1 = f_1\left(u_0\dot{C},\, \left(1-u_1\right)\dot{N}\right) \end{cases}$$

Метаболизм:

$$f_i\left(X,Y\right) = \min\left(a_i X, b_i Y\right)$$ – **монолимитирование**

$$f_i\left(X,Y\right) = a_i \frac{XY}{X+Y}$$ – **равносторонняя гипербола**

$$f_i\left(X,Y\right) = c_i X^{\alpha} Y^{1-\alpha}$$ – **функция Кобба-Дугласа**

Цель выбора u_0, u_1 – максимизация установившегося темпа удельного роста r

Симбиотическая азотфиксация. Агентные модели структуры популяции

Монолимитирование

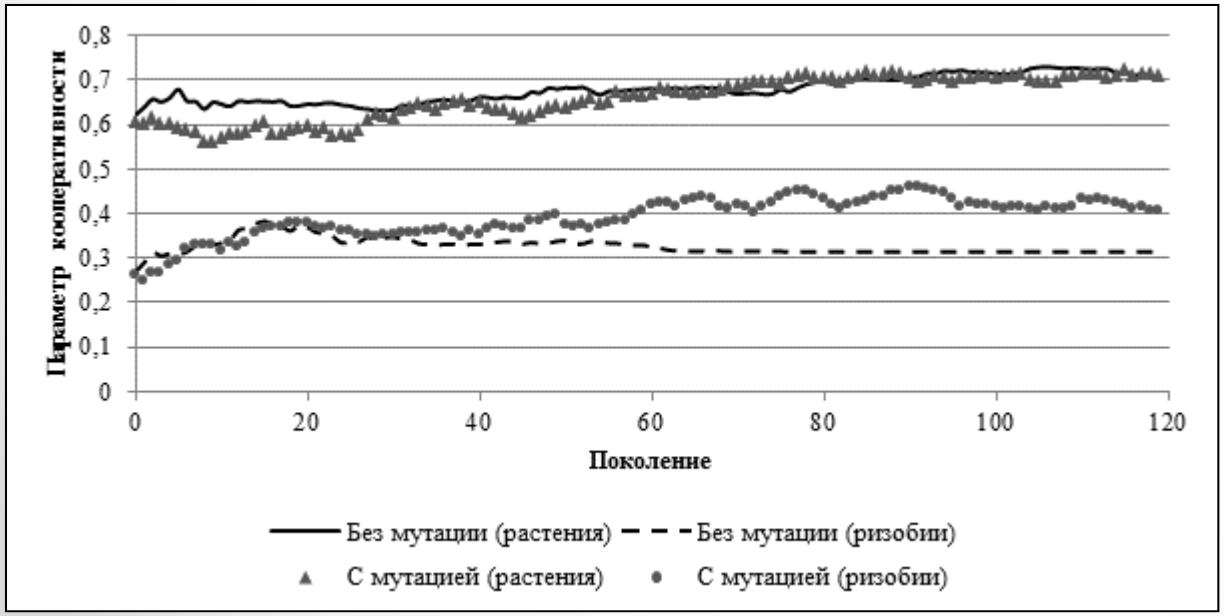
$$r = \min\left(a_0\sigma_0\left(1-u_0\right), b_1\sigma_1\left(1-u_1\right), \sqrt{a_1 b_0 \sigma_0 \sigma_1 u_0 u_1}\right)$$

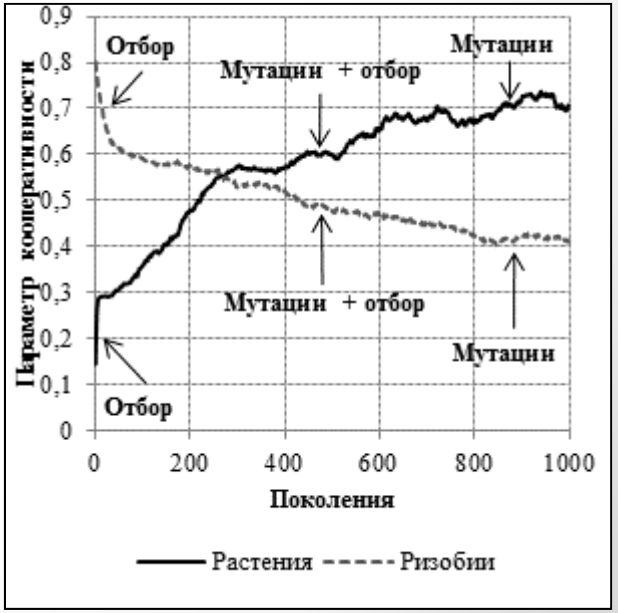
Равносторонняя гипербола

$$r^2\left(1-u_0\right)\left(1-u_1\right) = u_0 u_1\left(a_0\sigma_0\left(1-u_0\right)-r\right)\left(a_1\sigma_1\left(1-u_1\right)-r\right)$$

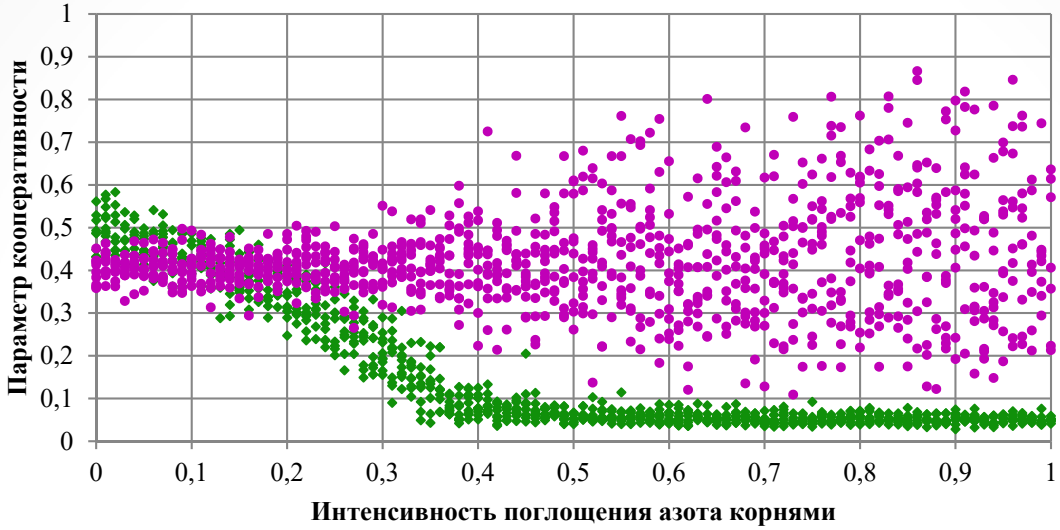
Функция Кобба-Дугласа

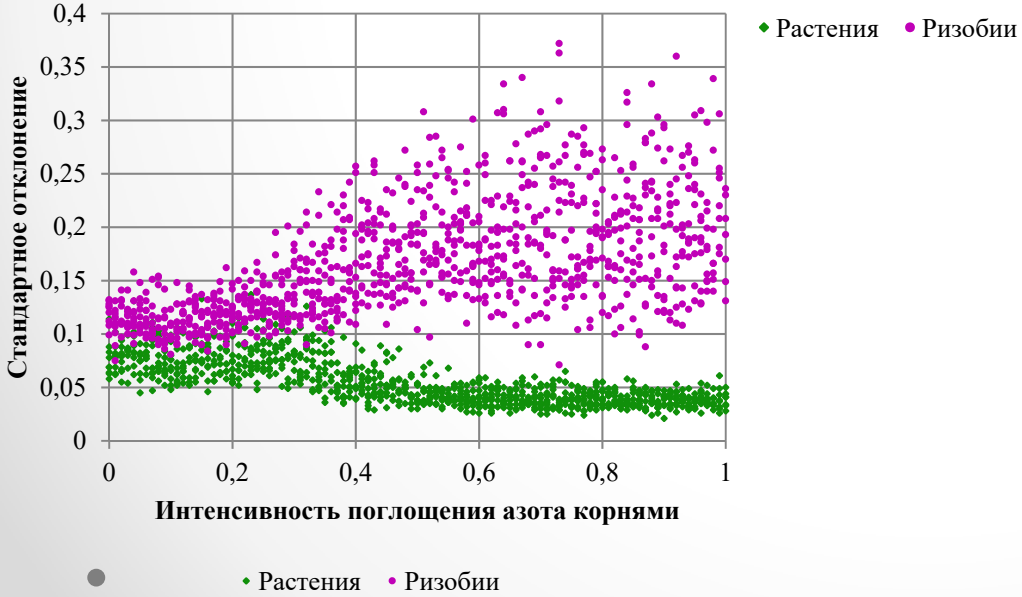
$$r^2\left(1-u_0\right)\left(1-u_1\right) = u_0 u_1\left(a_0\sigma_0\left(1-u_0\right)-r\right)\left(a_1\sigma_1\left(1-u_1\right)-r\right)$$

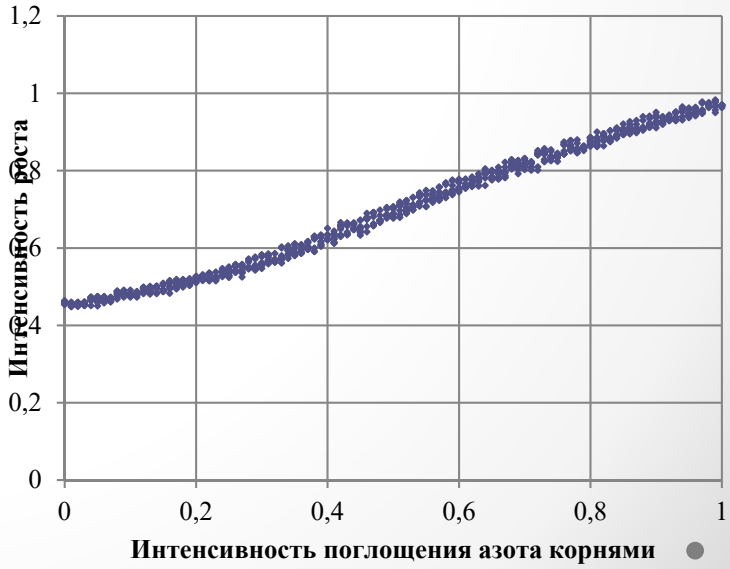




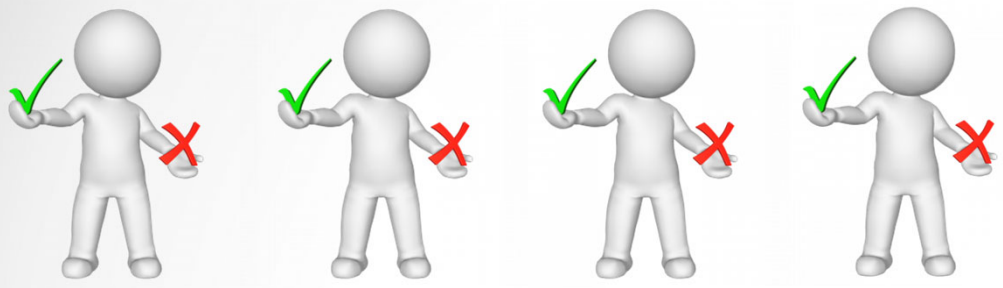
Симбиотическая азотфиксация. Поглощение азота корнями



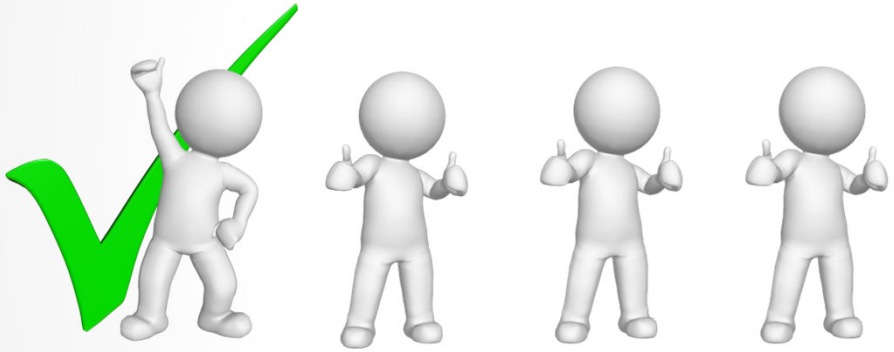




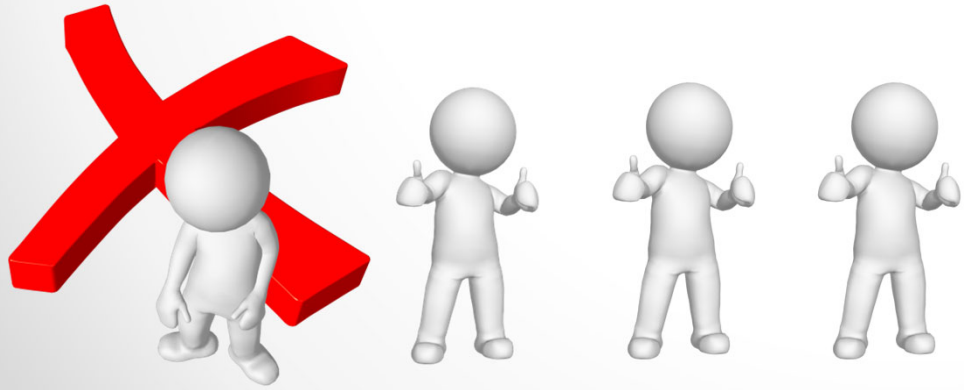
Задача о реновации общего ресурса. Дискретная постановка



Группа владельцев общего неразделяемого ресурса принимает решение о его модификации (реновации)
Стоимость участия – X
Выгода от реновации – Y (Y>X)



Реновация осуществляется если ВСЕ участники группы согласились в ней участвовать…



…и не осуществляется, если ХОТЯ БЫ ОДИН из них отказался от участия в общем проекте

Задача о реновации общего ресурса. Эволюционное уравнение

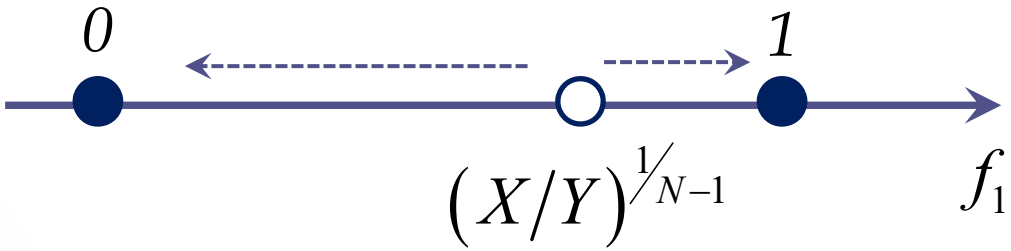
Выигрыш «кооператора»

$$\varphi_1 = \left(Y - X\right)\cdot f_1^{N-1} - X\cdot\left(1 - f_1^{N-1}\right)$$

f_1 – доля кооператоров в обществе, N– объем группы

Репликаторное уравнение

$$\begin{cases} \dot{f}_0 = f_0 \cdot Z \\ \dot{f}_1 = -f_0 \cdot Z \end{cases}, \quad Z = -\left(Y - X\right)\cdot f_1^{N} + X\cdot f_1 \cdot\left(1 - f_1^{N-1}\right)$$



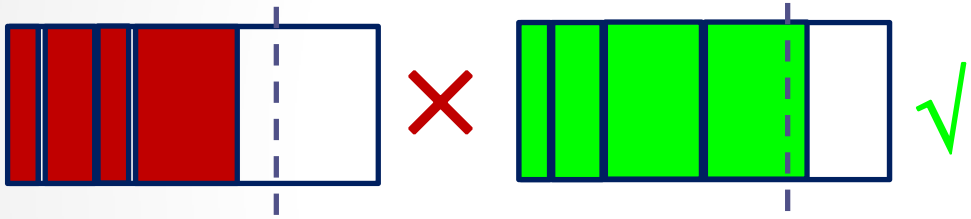
Самый важный вывод, который следует осознать человечеству — это необходимость отказаться от принципа ресурсов общего пользования в воспроизводстве

Гаррет Хардин

Ад –это другие.

Жан-Поль Сартр

Задача о реновации общего ресурса. Непрерывная постановка. Теория



Каждый участник группы делает некий вклад в общий пул. В случае, если общая вложенная сумма превышает определенный порог все участники группы получают определенный доход. В противном случае вклады безвозвратно утрачиваются

Функция приспособленности в репликаторном уравнении (N=2) :

$$g(x) = -x + Y \int_{X-x}^{1} f(t) \cdot dt$$

Стационарные решения :

$$f(x) = \delta(x-0) \quad f(x) = \delta(x-0.5 \cdot X)$$

$$f(x) = p_a \cdot \delta(x - x_a) + p_b \cdot \delta(x - x_b)$$

$$p_b = 1 - p_a \ , \ x_b = X - x_a \ ,$$

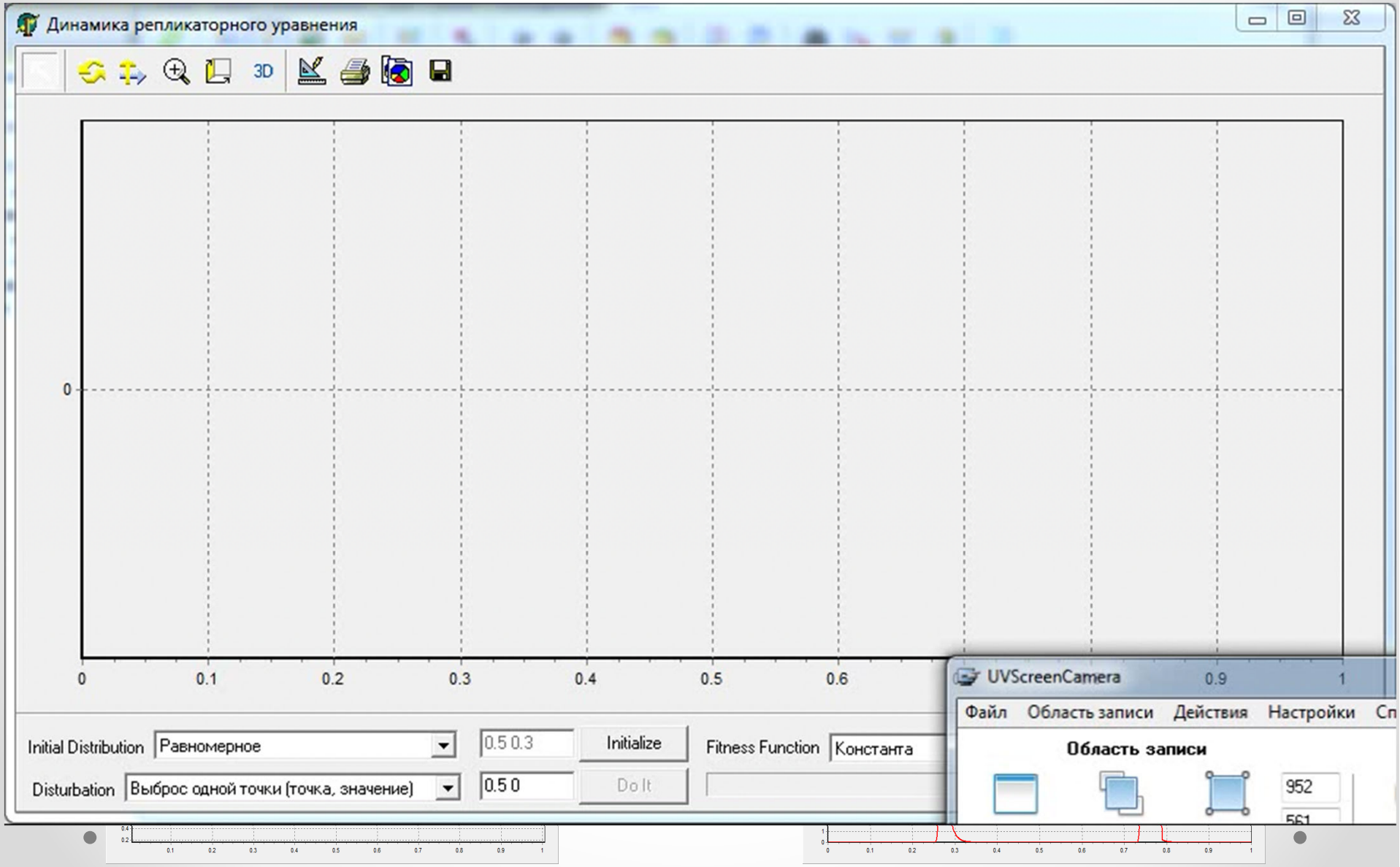
$$-p_a \cdot x_a + p_b \cdot (Y - x_a) = Y - x_b$$

$f(x) \equiv 1$ *неустойчиво*

Теорема А.Н. Горбаня:

Носитель асимптотически стабильного распределения решения уравнения естественного отбора всегда дискретный.

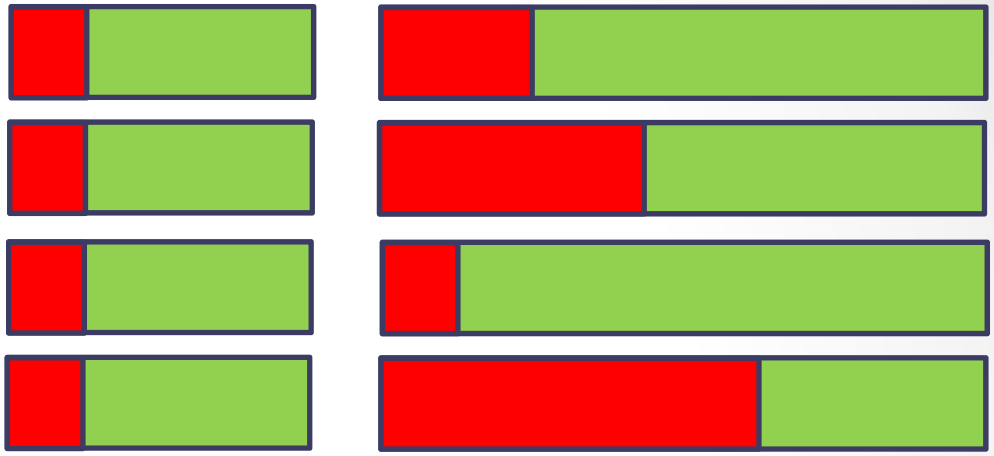
Задача о реновации общего ресурса. Непрерывная постановка. Эксперимент



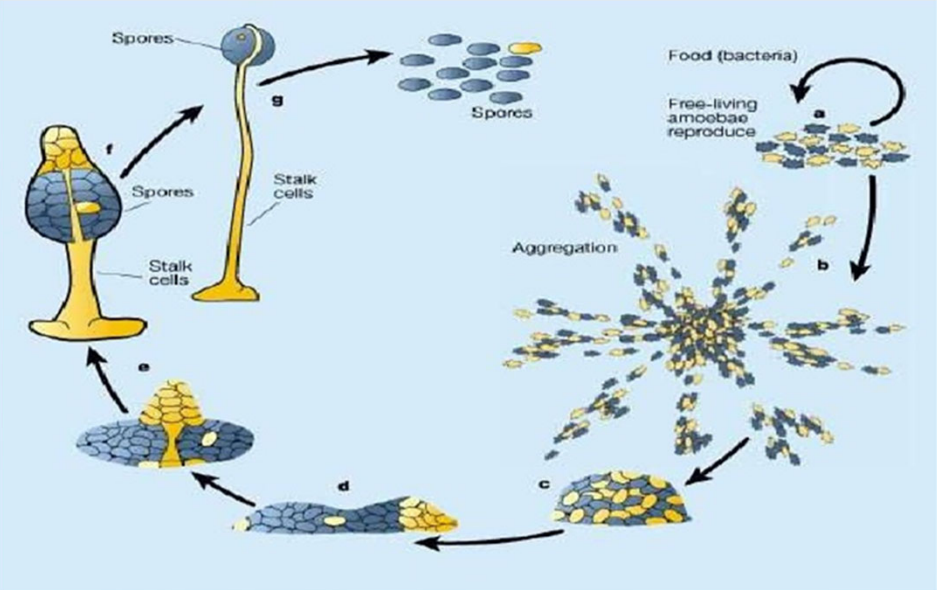
Задача о «социальных амебах»

Шкала налогообложения:

- Плоская
- Прогрессивная
- Подушный налог
- Равный доход



Жизненный цикл «клеточной слизи»



Matsuda, Harada, 1990

Equalization of Net Income

x_i – общее число клеток клона i

y_i – число клеток клона i в «шляпке»

$x_i - y_i$ – число клеток клона i в «ножке» (налог)

$\phi_i = y_i f(x,y)$ –приспособленность клона i

$$y_i^* = y_c \quad , \quad x_i > y_c$$
$$y_i^* = x_i \quad , \quad x_i \le y_c$$

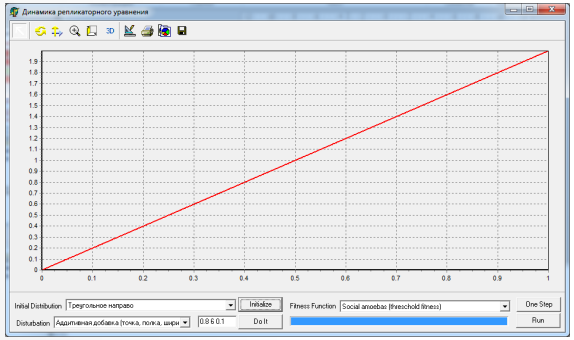
Задача о «социальных амебах». Игровая постановка.

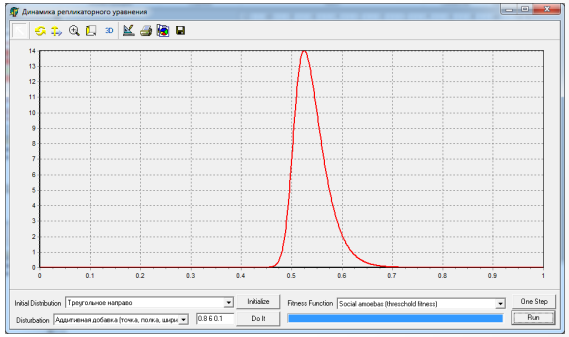
$$\varphi_i(x_i) = (1 - x_i) \cdot S\left(x_i + \sum_{j=1;\, j \neq i}^{N} x_j \right)$$

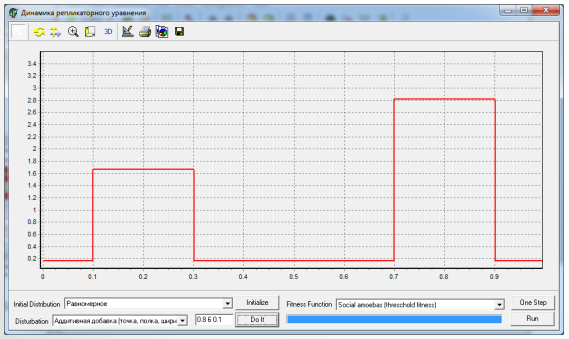
Для случая парных взаимодействий (N=2) :

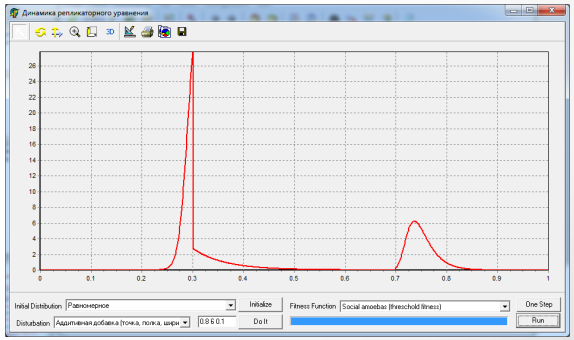
$$\varphi(x) = (1 - x) \cdot \int_0^1 S(x + t) \cdot f(t) \cdot dt$$

S – пороговая или сигмоидальная функция

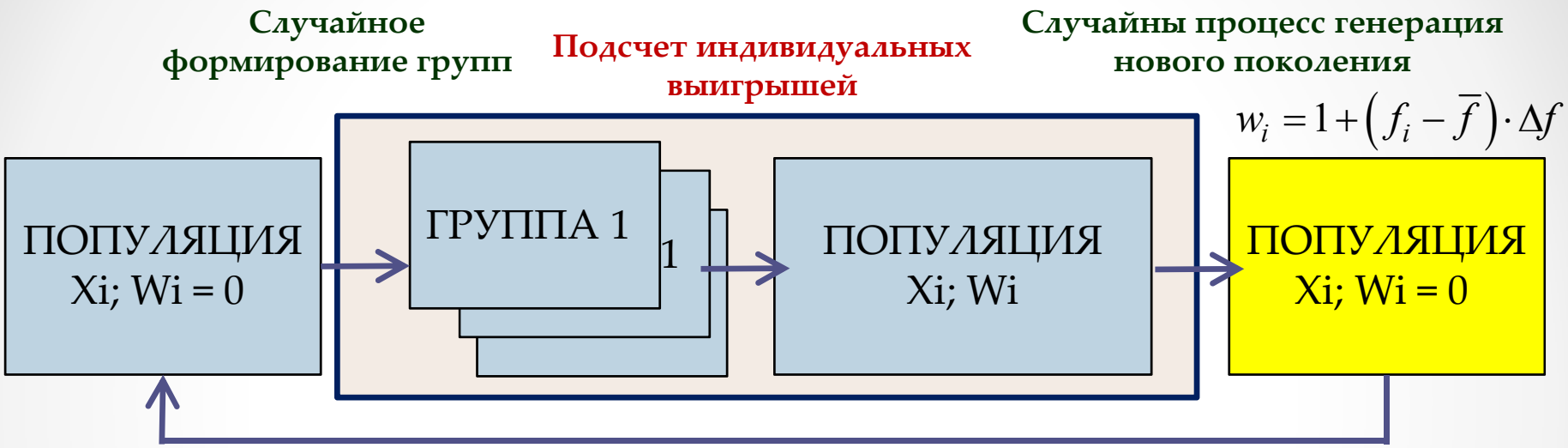


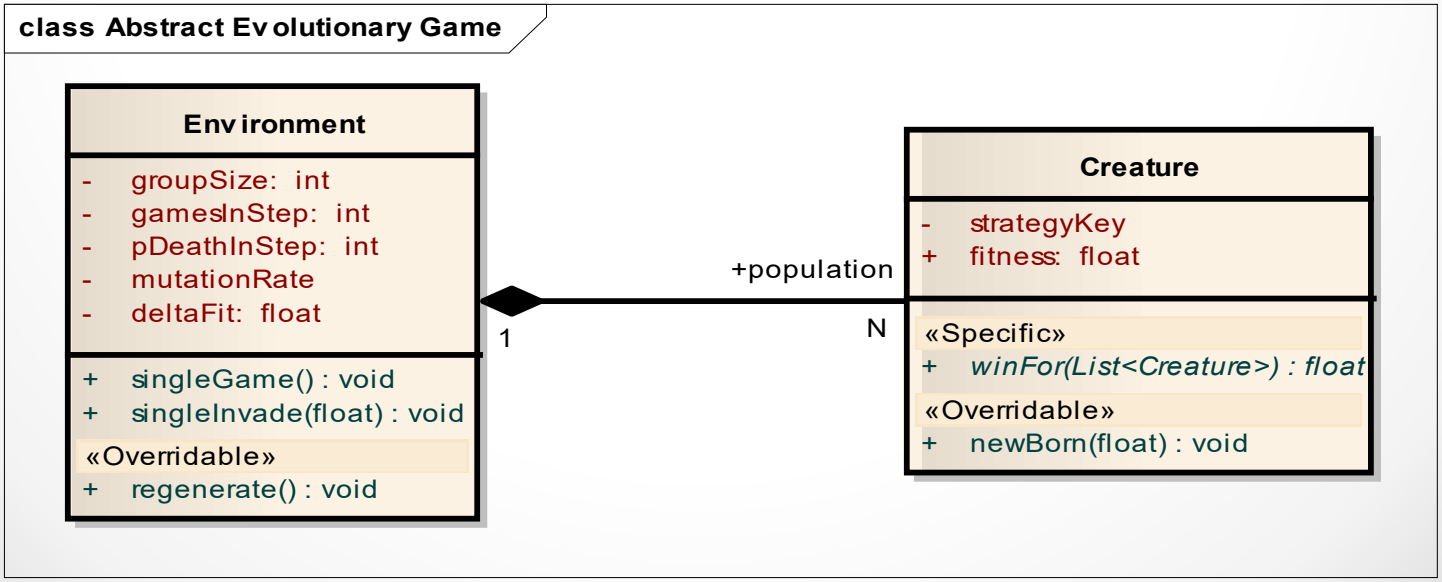






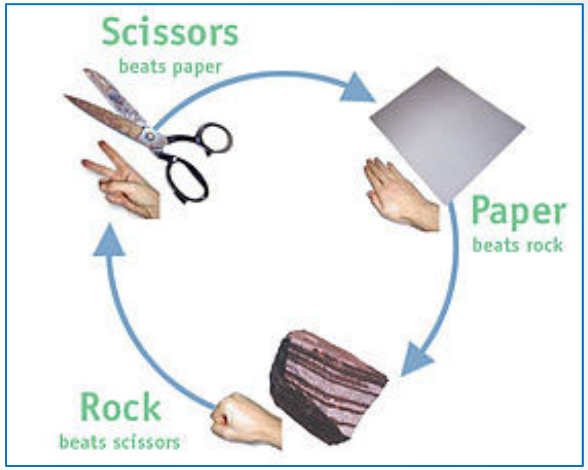
Агентные модели эволюционных игр. Общий прототип



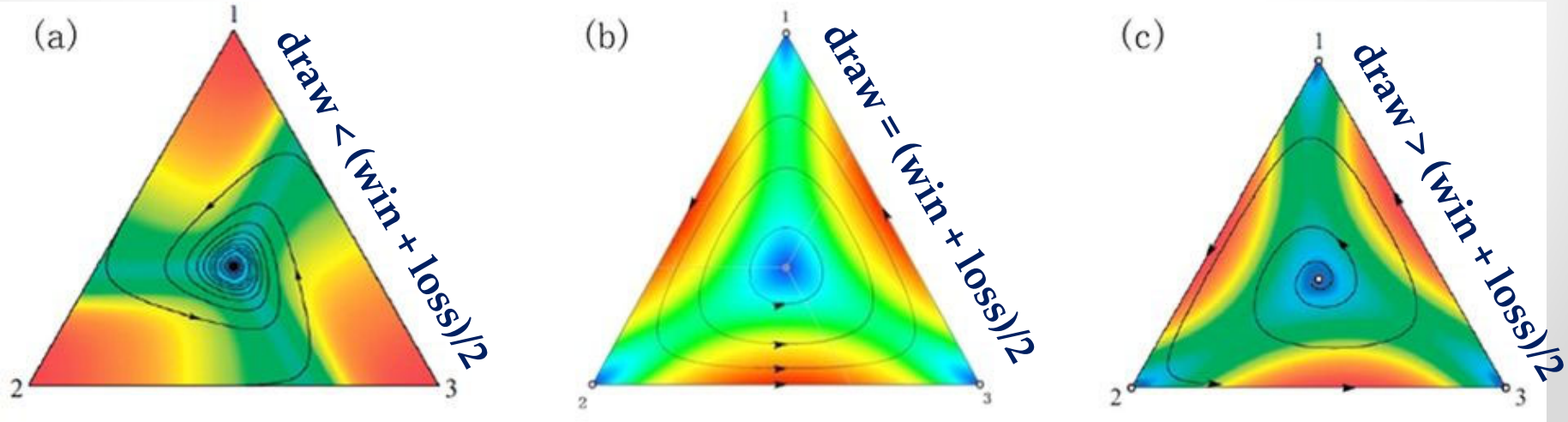


Преимущества агентных моделей над аналитическими методами

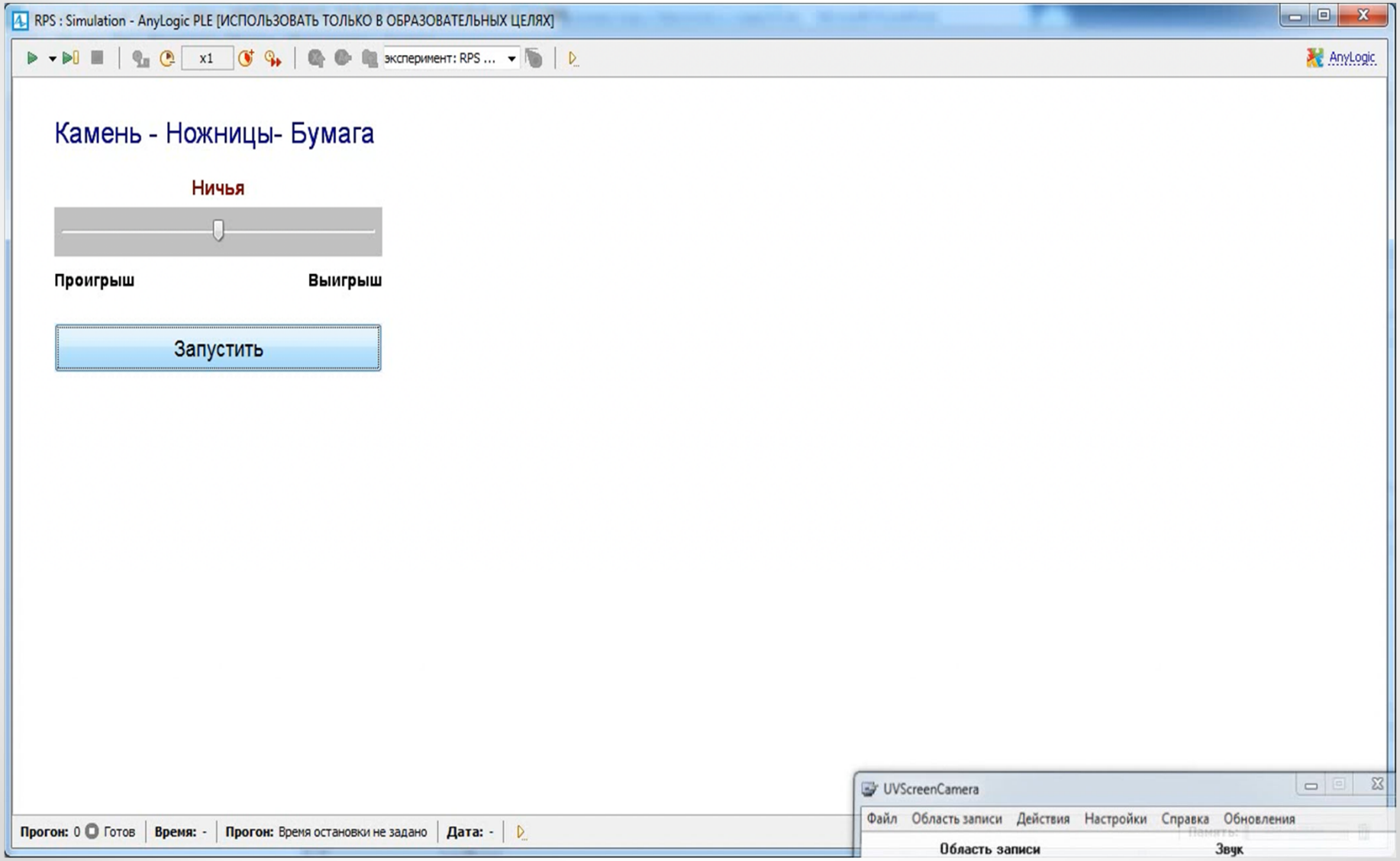
- Конечный объем популяции
- Нестрогое наследование (мутации)
- Стохастический выбор стратегии
- Условные стратегии (учёт опыта)
- Учет пространственной структуры



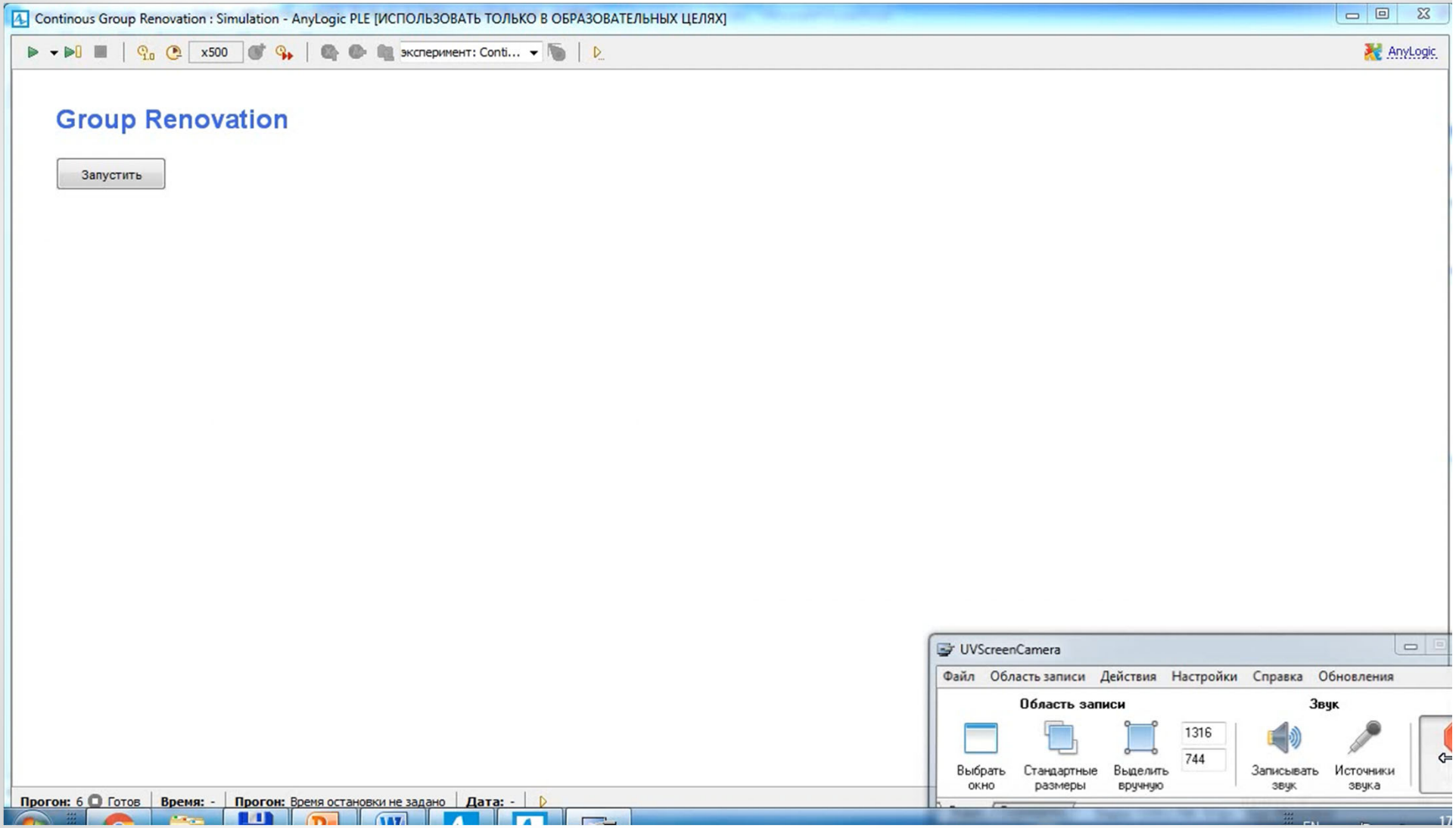
ИГРА
«Камень – Ножницы – Бумага»



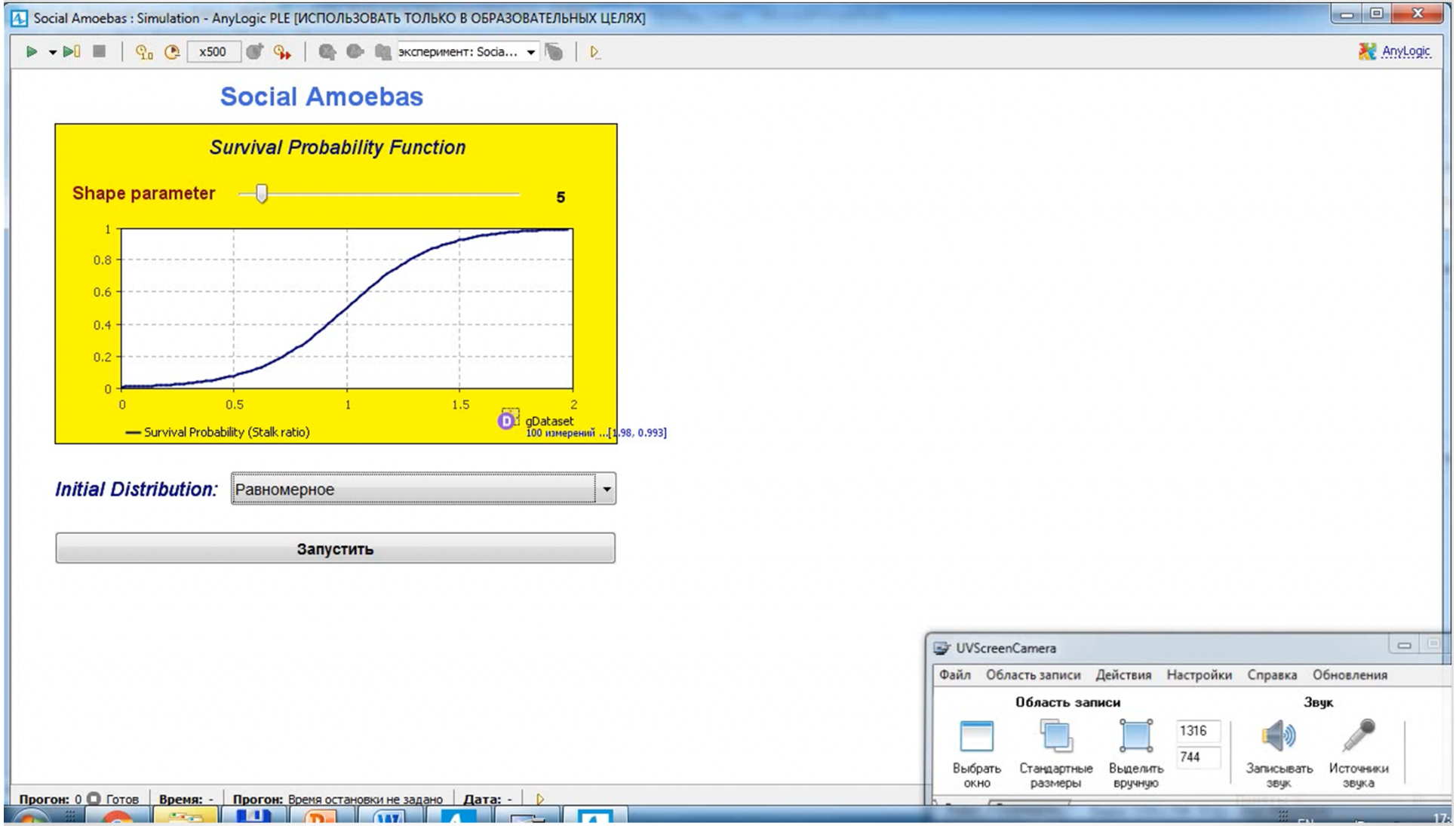
Камень – ножницы – бумага
Агентная модель



Задача о реновации общего ресурса. Агентная модель



Задача о социальных амёбах. Агентная модель



Перспективы и вызовы

1. Аналитическое исследование областей притяжений в задаче о групповой кооперации с пороговой функцией выигрыша
2. Исследование и качественного вида решений для произвольного размера группы взаимодействующих особей (N>2)
3. Определение необходимых и достаточных условий выполнимости теоремы А.Н. Горбаня о характере предельного распределения для случая дифференциальной эволюционной игры
4. Исследование влияния на устойчивость невырожденных предельных распределений неидеального наследования (мутаций)
5. Исследование эффектов пространственной структуры в агентных моделях социальной кооперации (концентрированная vs. «рассыпная» инвазия)

Спасибо за внимание!